Equations différentielles linéaires

Résolution d'équations d'ordre 1

Exercice 1 [01541] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $y' + 2y = x^2$ b) $y' + y = 2\sin x$
c) $y' - y = (x+1)\mathrm{e}^x$ d) $y' + y = x - \mathrm{e}^x + \cos x$

Exercice 2 [01543] [Correction]
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $I = \mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$ l'équation différentielle

$$xy' - \alpha y = 0$$

Exercice 3 [01542] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $(x^2+1)y' + 2xy + 1 = 0$ b) $(x^2+1)y' - xy = (x^2+1)^{3/2}$
c) $(x^2+1)^2 y' + 2x(x^2+1)y = 1$

Exercice 4 [01280] [Correction]
Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés
a) $(1+\mathrm{e}^x)y' + \mathrm{e}^x y = (1+\mathrm{e}^x)$ sur $\mathbb{R}$
b) $(\mathrm{e}^x - 1)y' + \mathrm{e}^x y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$,
c) $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$

Exercice 5 [01281] [Correction]
Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle suivante

$$\sqrt{1-x^2}\,y' + y = 1$$

Exercice 6 [01379] [Correction]
Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés
a) $(2+\cos x)y' + \sin(x)y = (2+\cos x)\sin x$ sur $\mathbb{R}$
b) $(1+\cos^2 x)y' - \sin 2x.y = \cos x$ sur $\mathbb{R}$
c) $y'\sin x - y\cos x + 1 = 0$ sur $]0,\pi[$,
d) $(\sin x)^3 y' = 2(\cos x)y$ sur $]0,\pi[$.

Exercice 7 [01434] [Correction]
Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés
a) $\mathrm{ch}x.y' - \mathrm{sh}x.y = \mathrm{sh}^3 x$ sur $\mathbb{R}$
b) $y' - \frac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}y = \mathrm{sh}x$ sur $\mathbb{R}$
c) $\mathrm{sh}(x)y' - \mathrm{ch}(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$,

Exercice 8 [01544] [Correction]
Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les fonctions

$$f(x) = \frac{C+x}{1+x^2}$$

seraient les solutions.

Résolution d'équations d'ordre 2

Exercice 9 [01549] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
a) $y'' + y = 0$
b) $y'' - 3y' + 2y = 0$
c) $y'' + 2y' + 2y = 0$

Exercice 10 [01450] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
a) $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^x$
b) $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^x$

Exercice 11 [01435] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
a) $y'' + 2y' + 2y = \sin x$
b) $y'' + y = 2\cos^2 x$

Exercice 12 [01460] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
a) $y'' + y = \mathrm{sh}x$
b) $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{ch}x$

Exercice 13 [01550] [Correction]
Soient ω et ω_0 deux réels strictement positifs et distincts.
Trouver les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 14 [03849] [Correction]
Déterminer les solutions réelles de l'équation

$$(E) : y'' - 3y' + 2y = \sin(2x)$$

Exercice 15 [01551] [Correction]
Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Problèmes se ramenant à la résolution d'une équation différentielle

Exercice 16 [01548] [Correction]
Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Exercice 17 [01546] [Correction]
Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 18 [01552] [Correction]
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x$$

Exercice 19 [03197] [Correction]
Déterminer les fonctions réelles f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2 - x)$$

Exercice 20 [01545] [Correction]
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivables telles que

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, f(s + t) = f(s)f(t)$$

Exercice 21 [00379] [Correction]
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x)$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + C\mathrm{e}^{-2x}$.
b) $y(x) = -\cos x + \sin x + C\mathrm{e}^{-x}$.
c) $y(x) = \left(x^2/2 + x\right)\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x$.
d) $y(x) = x - 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + C\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 2 : [énoncé]
Sur I,

$$xy' - \alpha y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{\alpha}{x}y$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.

$$\int \frac{\alpha}{x}\,\mathrm{d}x = \alpha \ln|x|$$

donc la solution générale de l'équation étudiée est

$$y(x) = C\,|x|^\alpha$$

Exercice 3 : [énoncé]
a) $y(x) = \frac{C-x}{1+x^2}$
b) $y(x) = \sqrt{1+x^2}(C+x)$
c) $y(x) = \frac{C+\arctan x}{1+x^2}$

Exercice 4 : [énoncé]
a) $y(x) = \frac{C+x+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$
b) $y(x) = \frac{C+x}{\mathrm{e}^x-1}$
c) $y(x) = \frac{C+\ln x}{(1+\ln^2 x)}$

Exercice 5 : [énoncé]
On obtient la solution générale

$$y(x) = 1 + C\mathrm{e}^{\arccos x}$$

ou encore, et c'est équivalent

$$y(x) = 1 + C'\mathrm{e}^{-\arcsin x}$$

Exercice 6 : [énoncé]
a) $y(x) = (2+\cos x)(C - \ln(2+\cos x))$
b) $y(x) = \frac{C+\sin x}{1+\cos^2 x}$
c) $y(x) = C\sin x + \cos x$
d) $y(x) = C\mathrm{e}^{-1/\sin^2 x}$

Exercice 7 : [énoncé]
a)$y(x) = \mathrm{ch}^2 x + 1 + C\mathrm{ch} x$
b) $y(x) = (\ln(1+\mathrm{ch} x) + C)(1+\mathrm{ch} x)$
c) $y(x) = C\mathrm{sh} x - \mathrm{ch} x$

Exercice 8 : [énoncé]
En exprimant C en fonction de f et en dérivant, on peut proposer l'équation suivante

$$(1+x^2)y' + 2xy = 1$$

Exercice 9 : [énoncé]
a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$ de racines $\pm i$.
La solution générale est donc

$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$$

b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ de racines 1 et 2
La solution générale est donc

$$y(x) = \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{2x}$$

c) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 2 = 0$ de racines $-1 \pm i$.
La solution générale est donc

$$y(x) = (\lambda\cos x + \mu\sin x)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Exercice 10 : [énoncé]
a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ de racine double -1
La solution générale homogène est donc

$$y(x) = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{-x}$$

Une solution particulière est à rechercher de la former $y(x) = \alpha \mathrm{e}^x$. On obtient $\alpha = 1/4$
La solution générale est alors

$$y(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^x + (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{-x}$$

b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ de racines 1 et -2
La solution générale homogène est donc

$$y(x) = \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{-2x}$$

Une solution particulière est à rechercher de la former $y(x) = \alpha x \mathrm{e}^x$. On obtient $\alpha = 1/3$.
La solution générale est alors

$$y(x) = \frac{1}{3}x\mathrm{e}^x + \lambda \mathrm{e}^x + \mu \mathrm{e}^{-2x}$$

Exercice 11 : [énoncé]
a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$ de racines $-1 \pm i$.
La solution générale homogène est donc $y(x) = (\lambda \cos x + \mu \sin x)\,\mathrm{e}^{-x}$
En déterminant une solution particulière à l'équation complexe

$$z'' + 2z' + 2z = \mathrm{e}^{ix}$$

on obtient par sa partie imaginaire une solution particulière de l'équation en cours.
Au final, la solution générale est

$$y(x) = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x + (\lambda \cos x + \mu \sin x)\mathrm{e}^{-x}$$

b)) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ de racines $\pm i$.
La solution générale homogène est donc $y(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$
On décompose le second membre par la formule

$$2\cos^2 x = \cos(2x) + 1$$

On détermine une solution particulière pour chacun de deux termes puis, par le principe de superposition des solutions, on exprime la solution générale

$$y(x) = 1 - \frac{1}{3}\cos 2x + \lambda \cos x + \mu \sin x$$

Exercice 12 : [énoncé]
a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ de racines $\pm i$.
La solution générale homogène est donc $y(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$
$y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sh}(x)$ est solution apparente de l'équation complète.
La solution générale est alors

$$y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sh}(x) + \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$$

b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $(r-1)^2 = 0$ de racine double 1.
La solution générale homogène est donc $y(x) = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^x$
Le second membre de l'équation se décompose

$$2\mathrm{ch}(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$$

On détermine une solution particulière pour chacun des deux termes et, par le principe de superposition, on peut exprimer la solution générale

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x} + (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^x$$

Exercice 13 : [énoncé]
Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 + \omega^2 = 0$ de racines $\pm i\omega$.

La solution générale homogène est donc $y(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$
En introduisant l'équation complexe

$$z'' + \omega^2 z = \mathrm{e}^{i\omega_0 x}$$

et en considérant la partie réelle d'une solution particulière de celle-ci, on peut exprimer la solution générale

$$y(x) = \frac{\cos(\omega_0 x)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$$

Les conditions initiales déterminent λ et μ

$$y(x) = \frac{\cos(\omega_0 x) - \cos(\omega x)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \cos(\omega x)$$

Exercice 14 : [énoncé]
(E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

de racines 1 et 2
Solution générale homogène :

$$y(x) = \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{2x} \text{ avec } \lambda, \mu \text{ parcourant } \mathbb{R}$$

Cherchons une solution particulière à l'équation

$$z'' - 3z' + 2z = \mathrm{e}^{2ix}$$

de la forme $z(x) = \lambda\mathrm{e}^{2ix}$. On est amené à résoudre

$$(-2 - 6i)\lambda\mathrm{e}^{2ix} = \mathrm{e}^{2ix}$$

On obtient

$$z(x) = \frac{3i - 1}{20}\mathrm{e}^{2ix}$$

et l'on peut donc proposer la solution particulière

$$y(x) = \frac{3}{20}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x)$$

La solution générale de (E) est alors

$$y(x) = \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{20}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x) \text{ avec } \lambda, \mu \text{ parcourant } \mathbb{R}$$

Exercice 15 : [énoncé]
Posons $\Delta = a^2 - 4b$ discriminant de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.
Si $\Delta > 0$ alors les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ seront bornées sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, les deux solutions de l'équation $r^2 + ar + b = 0$ sont négatives i.e. $a \geqslant 0$ (opposé de la somme des racines) et $b \geqslant 0$ (produit des racines).
Si $\Delta = 0$ alors les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ seront bornées sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, $a > 0$.
Si $\Delta < 0$ alors les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ seront bornées sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, elles sont de parties réelles négatives i.e. $a \geqslant 0$.
Au final les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, $a, b \geqslant 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

Exercice 16 : [énoncé]
Une telle fonction est solution d'une équation différentielle de la forme $y' + y = C$ et vérifie $y(0) + y(1) = C$.
Les solutions de cette équation différentielle sont $y(x) = C + D\mathrm{e}^{-x}$.

$$y(0) + y(1) = 2C + D\frac{1 + \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = C \Leftrightarrow D = -\frac{\mathrm{e}C}{\mathrm{e} + 1}$$

Les solutions sont les

$$f(x) = C\frac{\mathrm{e} + 1 - \mathrm{e}^{-x+1}}{\mathrm{e} + 1}$$

Inversement : ok

Exercice 17 : [énoncé]
Supposons f solution.
f est solution d'une équation différentielle de la forme $y' + y + \lambda = 0$ donc $f(x) = C\mathrm{e}^{-x} - \lambda$. De plus, pour une telle fonction,

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{C(\mathrm{e} - 1)}{\mathrm{e}} - \lambda$$

et donc une telle fonction est solution si, et seulement si,

$$\frac{C(\mathrm{e} - 1)}{\mathrm{e}} - \lambda = \lambda$$

d'où

$$\lambda = \frac{C(\mathrm{e} - 1)}{2\mathrm{e}}$$

Finalement, les solutions sont

$$f(x) = C\mathrm{e}^{-x} - \frac{C(\mathrm{e} - 1)}{2\mathrm{e}}$$

Exercice 18 : [énoncé]
Analyse : Supposons f est solution. On a

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - f(-x)$$

La fonction f' est dérivable et

$$f''(x) = \mathrm{e}^x + f'(-x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - f(x)$$

La fonction f est donc de l'équation différentielle $y'' + y = 2\mathrm{ch}x$
Après résolution

$$f(x) = \mathrm{ch}x + C_1\cos x + C_2\sin x$$

Synthèse : Une telle fonction est solution du problème si, et seulement si,

$$\mathrm{sh}x - C_1\sin x + C_2\cos x + \mathrm{ch}x + C_1\cos x - C_2\sin x = \mathrm{e}^x$$

Ce qui donne $C_1 + C_2 = 0$.
Finalement les solutions du problème posé sont

$$f(x) = \mathrm{ch}x + C(\cos x - \sin x)$$

Exercice 19 : [énoncé]
Soit f une fonction solution (s'il en existe).
La dérivée de f apparaît dérivable et donc f est deux fois dérivable avec

$$f''(x) = -f'(2-x) = -f(x)$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant de solution générale

$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$$

En injectant dans l'équation étudiée, une telle fonction est solution si, et seulement si,

$$\begin{cases} -\lambda = \lambda\sin 2 - \mu\cos 2 \\ \mu = \lambda\cos 2 + \mu\sin 2 \end{cases}$$

ce qui après résolution équivaut à l'équation

$$(1+\sin 2)\lambda = (\cos 2)\mu$$

En écrivant $\lambda = (\cos 2)\alpha$, on a $\mu = (1+\sin 2)\alpha$ et la solution générale de l'équation étudiée est de la forme

$$f(x) = \alpha\left(\sin x + \cos(2-x)\right) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

Exercice 20 : [énoncé]
Supposons f solution. En évaluant la relation en $s = t = 0$ on obtient
$f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$
En dérivant la relation en t on obtient : $f'(s+t) = f(s)f'(t)$ puis en évaluant en $t = 0$: $f'(s) = f'(0)f(s)$.
Ainsi f est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = \alpha y$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.
On en déduit $f(x) = C\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $C, \alpha \in \mathbb{C}$.
Parmi ces solutions, celles vérifiant $f(0) = 0$ ou 1 sont $f(x) = 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$.
Inversement, ces fonctions sont solutions.

Exercice 21 : [énoncé]
Soit f une solution.
Pour $x = y = 0$ on obtient $f(0) = 0$.
De plus

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\mathrm{e}^x f(h) + \mathrm{e}^h f(x) - f(x)}{h} = \mathrm{e}^x\frac{f(h) - f(0)}{h} + \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}f(x)$$

donc

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \mathrm{e}^x f'(0) + f(x)$$

Par suite f est dérivable en x et $f'(x) = f'(0)\mathrm{e}^x + f(x)$.
La fonction f est alors solution d'une équation différentielle de la forme
$y' = y + C\mathrm{e}^x$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.
Après résolution, on obtient

$$f(x) = Cx\mathrm{e}^x$$

Inversement, de telles fonctions sont solutions.